DIAGONALISATION DES MATRICES

DIAGONALISATION DES MATRICES
Les valeurs et les vecteurs propres

- **Les valeurs et les vecteurs propres d'une application**

Soit ***f*** une application linéaire de ***E*** vers ***E.***

Un vecteur ***v*** de ***E*** est dit **vecteur propre** de ***f*** si :

1- $v \neq 0_E$

2- $\exists \lambda \in K \; tel \; que: \;\; f(v) = \lambda v$

Le scalaire λ est appelé **valeur propre** associé à ***v***

DIAGONALISATION DES MATRICES
Les valeurs et les vecteurs propres

- **Exemple**

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to (x+3y, 2y)$$

$$f(-1,5) = (14,10) = 2(7,5)$$

$(-1,5)$ n'est pas un **vecteur propre** de ***f***

$$f\boxed{(3,1)} = (6,2) = 2\boxed{(3,1)}$$

$\boxed{(3,1)}$ est un **vecteur propre** de ***f***

2 est la **valeur propre** associé à $(3,1)$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Les valeurs et les vecteurs propres

- **Remarques**

1 - $si\, v \in Ker f \;\; et \;\; v \neq O_E$

Alors la valeur propre λ associée à **v** est nulle

2 - $si \quad f(v) = \lambda v$

$si\ \exists \quad u = \mu v \;\; (\mu \neq 0)$

alors

$si \quad f(u) = \lambda u$

Il s'ensuit qu'à une **valeur propre** on peut associer plusieurs **vecteurs propres** différents

DIAGONALISATION DES MATRICES
Les valeurs et les vecteurs propres

- **Les valeurs et les vecteurs propres d'une matrice**

  Soit ***M*** une matrice carrée associé à l'application linéaire ***f*** de ***E*** vers ***E.***

On dit que ***v*** est un **vecteur propre** de ***M*** associé à la **valeur propre** λ si :

1- $v \neq 0_E$

2- $M\,v = \lambda\,v$

Le ***v*** est donnée en représentation matricielle colonne dim(n,1)

DIAGONALISATION DES MATRICES
Les valeurs et les vecteurs propres

- **Exemple**

$$f \; : \; \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to (x + 3y, 2y)$$

La matrice correspondante à cette application, dans la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie bien que

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2y \end{pmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Les valeurs et les vecteurs propres

- **Exemple (suite)**

Considérons le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ on aura :

$$M\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix} = 2\boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

$$\neq$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ n'est pas un **vecteur propre** de ***M*** **(*f*)**

DIAGONALISATION DES MATRICES
Les valeurs et les vecteurs propres

- **Exemple (suite)**

Considérons le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ on aura :

$$M\boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}=2\boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un **vecteur propre** de ***M***

2 est la **valeur propre** associé au **vecteur propre** de ***M***

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Recherches des valeurs propres d'une matrice**

Pour simplifier considérons une matrice carré d'ordre 2 :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Cherchons la condition pour que A possède des valeurs propres λ c'est-à-dire

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad avec \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Recherches des valeurs propres d'une matrice (suite)**

ce qui équivaut à résoudre le système en x et y suivant :

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = \lambda\,x \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = \lambda\,y \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \left(a_{11} - \lambda\right)x + a_{12}\,y = 0 \\ a_{21}\,x + \left(a_{22} - \lambda\right)y = 0 \end{cases}$$

qu'on peut écrire sou la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \left(a_{11} - \lambda\right)x + a_{12}\,y \\ a_{21}\,x + \left(a_{22} - \lambda\right)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(M - \lambda\,I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Recherches des valeurs propres d'une matrice (suite)**

La condition pour que A possède des valeurs propres : c'est que le système correspondant possède une solution non nulle en x et/ou y.

cette condition est

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{21}\,a_{12}=0$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$det\left(M-\lambda\,I\right)=0$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Théorème**

Si M est la matrice représentative d'une application ***f*** de E dans lui-même, dans une base quelconque, alors les valeurs propres de ***M (f)*** sont les nombres vérifiant l'équation :

$$det\left(M-\lambda I\right)=0$$

soit

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & .. & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & .. & .. & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & .. & .. & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .. & .. & .. & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Équation et polynôme caractéristique**

En développant le déterminant obtenu , on trouve une équation du type :

$$(-)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots\dots\dots\dots + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0$$

C'est **l'équation caractéristique** de ***M*** (***f***).

Le nombre de racines est inférieur ou égale à n

Le polynôme du premier membre est appelé **polynôme caractéristique** de ***M*** (***f***), noté ***P(λ).***

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Théorème d'Alembert_Gauss (suite)**

Le polynôme **caractéristique** ***P(λ)*** peut s'écrire :

$$P(\lambda)=(-)^n(\lambda-r_1)^{m_1}(\lambda-r_2)^{m_2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda-r_q)^{m_q}$$

où les $\boldsymbol{r_i}$ représentent les racines du polynôme ***P(λ)***

et où

$$m_1+m_2+\ldots\ldots\ldots+m_q=n$$

et où $\boldsymbol{r_k}$ est **une valeur propre de multiplicité** $\boldsymbol{m_k}$,

c'est une solution d'ordre $\boldsymbol{m_k}$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Application**

Rechercher la (les) valeur(s) propre(s) de la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 8 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 16\right) = 0 \qquad \lambda = 1, 5, -3$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 16\right) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 13\lambda - 15 = -(\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda + 3)$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Valeurs propres & polynômes caractéristiques

- **Application**

Rechercher la (les) valeur(s) propre(s) des la matrices suivantes

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0 \qquad \lambda=1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},1\text{-}\sqrt{2}$$

$$P(\lambda)=-\left(\lambda-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2\left(\lambda-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$$

$\left(1+\sqrt{2}\right)$ est **une valeur propre de multiplicité *2***

$\left(1\text{-}\sqrt{2}\right)$ est **une valeur propre de multiplicité *1***

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Déterminations des vecteurs propres d'une matrice**

Une fois les valeurs propres λ calculées, les vecteurs propres **u** sont déterminés par l'équation

$$M\,u = \lambda\,u$$

tel que

$$u \neq 0$$ ***0*** est le vecteur nul

Ou encore

$$\left(M - \lambda\,I\right)u = 0$$ ***0*** est la matrice nulle

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application**

Rechercher la (les) valeur(s) propre(s) de la matrice suivante

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 8 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix} \qquad \lambda=5,-3,1$$

$$(A-\lambda I)u=0 \rightarrow \begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 8 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 4 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}(1-\lambda)x+2y+0z=0\\ 8x+(1-\lambda)y+0z=0\\ 1x+4y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$$

$\lambda=5$

$$\begin{cases}-4x+2y+0z=0\\ 8x-4y+0z=0\\ 1x+4y-4z=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\frac{4}{9}z\\ y=\frac{8}{9}z\\ z=z\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\frac{4}{9}\\ y=\frac{8}{9}\\ z=1\end{cases}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application (suite)**

$\lambda = -3$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 0z = 0 \\ 8x + 4y + 0z = 0 \\ 1x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{7}z \\ y = -\dfrac{8}{7}z \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{7} \\ y = -\dfrac{8}{7} \\ z = 1 \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{cases} 0x + 2y + 0z = 0 \\ 8x + 0y + 0z = 0 \\ 1x + 4y + 0z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application (suite)**

En résumé pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

$$\lambda_1 = 5 \longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \longrightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application**

Rechercher la (les) valeur(s) propre(s) de la matrice suivante

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \lambda = 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$$

$$(A-\lambda I)u=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x+1y+0z=0 \\ 1x-\lambda y+0z=0 \\ 0x+0y+\left(1+\sqrt{2}-\lambda\right)z=0 \end{cases}$$

$$\lambda=1-\sqrt{2} \quad \begin{cases} \left(1+\sqrt{2}\right)x+1y+0z=0 \\ 1x-\left(1-\sqrt{2}\right)y+0z=0 \\ 0x+0y+2\sqrt{2}\,z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\left(1-\sqrt{2}\right)y \\ y=y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application (suite)**

$$\lambda = 1+\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)x + 1y + 0z = 0 \\ 1x - \left(1+\sqrt{2}\right)y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \left(1+\sqrt{2}\right)y \\ y = y \\ z = z \end{cases} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \begin{cases} x = 1+\sqrt{2} \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} x = \left(1+\sqrt{2}\right)\alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \end{array} \right.$$

Le choix est fait de tel manière que les trois vecteurs soient linéairement indépendants

$$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & \left(1+\sqrt{2}\right)\alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\,\beta \neq 0 \ \forall \alpha \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application (suite)**

En résumé pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1-\sqrt{2}$$

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1+\sqrt{2}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Matrice diagonale

- **Expression de la matrice dans la base formée par les vecteurs propres**

Une fois les vecteurs propres sont déterminés, on peut voir qu'ils forment une base :

$$\upsilon = \{u_1, u_2, u_3, \ldots.., u_n\}$$

La matrice associé à l'application linéaire ***f*** dans cet nouvelle base :

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & .. & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & \lambda_n \end{bmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Matrice diagonale

- **Matrice de passage**

La matrice de passage, notée ***P***, de la base initiale $B=\{e_1,e_2,e_3,.....,e_n\}$ à la nouvelle base $\upsilon=\{u_1,u_2,u_3,.....,u_n\}$ est construite en mettant en colonne les coordonnées des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres ::

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & .. & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & .. & .. & .. & u_n \end{bmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Matrice diagonale

- **Matrice de passage**

La matrice ***A*** de ***f*** relativement à la base $B=\{e_1,e_2,e_3,.....,e_n\}$ et la matrice $\tilde{A}$ relativement à la base $\upsilon=\{u_1,u_2,u_3,.....,u_n\}$ sont semblables :

$$\tilde{A}=P^{-1}AP$$

ou encore :

$$A=P\tilde{A}P^{-1}$$

Propriété :

$$A^k=P\tilde{A}^kP^{-1}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application**

Considérons l'application

$$f : R^3 \to R^3$$
$$: (x, y, z) \to (x + 2y, 8x + y, x + 4y + z)$$

La matrice de l'application dans la base canonique

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application (suite)**

La matrice de l'application dans la base des vecteurs propres de A

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de passage

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{8}{9} & -\frac{8}{7} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{16} & 0 \\ \frac{7}{8} & -\frac{7}{16} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

DIAGONALISATION DES MATRICES
Vecteurs propres

- **Application (suite)**

La puissance 5 de la matrice A sera donnée par

$$A^5 = P\widetilde{A}^5 P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{8}{9} & -\frac{8}{7} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{16} & 0 \\ \frac{7}{8} & -\frac{7}{16} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 5^5 & 0 & 0 \\ 0 & -3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$